Le problème des dés d'Efron et le dilemme
Schtroumpf gourmand versus Schtroumpf pâtissier

Aimé Lachal

15 octobre 2008

1 Prologue

Notons D_1 le dé immatriculé 0,0,4,4,4,4, D_2 celui immatriculé 3,3,3,3,3,3, D_3 celui immatriculé 2,2,2,2,6,6, D_4 celui immatriculé 1,1,1,5,5,5. Faisons la taxinomie exhaustive (allez hop ! une petite périssologie pour démarrer...) des confrontations dé à dé. Si Schtroumpf pâtissier choisit le dé D_1 :

$$\text{Prob}(D_2 \text{ bat } D_1) = \frac{1}{3}, \quad \text{Prob}(D_3 \text{ bat } D_1) = \frac{5}{9}, \quad \text{Prob}(D_4 \text{ bat } D_1) = \frac{2}{3}\,;$$

si Schtroumpf pâtissier choisit le dé D_2 :

$$\text{Prob}(D_1 \text{ bat } D_2) = \frac{2}{3}, \quad \text{Prob}(D_3 \text{ bat } D_2) = \frac{1}{3}, \quad \text{Prob}(D_4 \text{ bat } D_2) = \frac{1}{2}\,;$$

si Schtroumpf pâtissier choisit le dé D_3 :

$$\text{Prob}(D_1 \text{ bat } D_3) = \frac{4}{9}, \quad \text{Prob}(D_2 \text{ bat } D_3) = \frac{2}{3}, \quad \text{Prob}(D_4 \text{ bat } D_3) = \frac{1}{3}\,;$$

si Schtroumpf pâtissier choisit le dé D_4 :

$$\text{Prob}(D_1 \text{ bat } D_4) = \frac{1}{3}, \quad \text{Prob}(D_2 \text{ bat } D_4) = \frac{1}{2}, \quad \text{Prob}(D_3 \text{ bat } D_4) = \frac{2}{3}.$$

On constate que dans tous les cas, Schtroumpf gourmand a l'avantage de pouvoir choisir un dé lui permettant de se goinfrer avec une probabilité $p = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. Voilà un jeu qui relève de l'iniquité la plus abjecte pour notre pauvre hère Schtroumpf pâtissier...

Une alternative pour endiguer les affres endémiques du Schtroumpf pâtissier serait de se livrer à une suite inextinguible de jeux de dé suivant les mêmes conditions. Quel Schtroumpf cet exutoire va-t-il rendre exsangue tout en sachant que notre Schtroumpf pâtissier est une descendance de la chèvre Amalthée (la corne d'abondance immarscecible de l'Univers...) ? La réponse juste après la section suivante.

2 Modélisation du problème

2.1 Première modélisation

Les Schtroumpfs se livrent à une succession de jeux de dé illimitée avec, à chaque coup, une probabilité $p = \frac{2}{3}$ de gain pour l'infâme Schtroumpf gourmand, à l'instar d'une succession de pile ou face avec une pièce schtroumpfée.

- À l'issue d'un jeu gagnant (avec probabilité $p = \frac{2}{3}$), Schtroumpf gourmand gagne un gâteau.
- À l'issue d'un jeu perdant (avec probabilité $q = \frac{1}{3}$), soit Schtroumpf gourmand avait des gâteaux et il en rend un au Schtroumpf pâtissier, soit il n'a plus de gâteaux et dans ce cas il doit au Schtroumpf pâtissier une journée de plonge. On pourrait assimiler avec un peu d'imagination (si si) cette perte de patisserie ou journée de plonge à un gâteau « négatif ».

On note $X_n = +1$ dans le cas d'un jeu gagnant et $X_n = -1$ dans le cas d'un jeu perdant. Posons ensuite $S_n = X_1 + \cdots + X_n$; S_n représente le nombre de gâteaux (« positifs » et « négatifs » !) gagnés par Schtroumpf gourmand au bout de n jeux. Pour les Schtroumpfs initiés, la variable aléatoire S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la célèbre marche aléatoire du dipsomane impénitent ou de l'onagre claudiquant (je me répète, mais bis repetita placent...).

2.2 Deuxième modélisation

Le problème associé à la modélisation précédente n'étant pas complètement trivial (à cause de la mixité rendu de gâteau-unité de plonge), la rédaction a délibérément choisi de le simplifier en rajoutant une hypothèse de boulimie : Schtroumpf gourmand, Schtroumpf à la manducation irrépressible, engloutit instantanément chaque gâteau qu'il gagne et donc chaque gâteau qualifié de négatif représente un jour de pensum, Schtroumpf pâtissier ne récupère aucun de ses gâteaux (ce qui n'est pas un problème puisque Amalthée n'est pas loin de la résurrection...).

En fait, Schtroumpf gourmand qui se révèle être un croisement entre un Schtroumpf paresseux et un Schtroumpf tire-au-flanc n'est pas prêt à faire indéfiniment le sbire au service du Schtroumpf pâtissier à chaque échec au jeu de dé. En conséquence, on supposera que le nombre de jours de pénitence est fini, disons b. Par ailleurs, dans un premier temps, sans volonté d'offusquer la biquette capricante, on supposera que le stock du Schtroumpf pâtissier n'est pas aussi illimité qu'il le prétend : il contient a gâteaux. On fera ensuite tendre a vers l'infini pour honorer le mythe.

On définit alors $N_a = \min\{n \geqslant 1 : S_n = a\}$ et $N_{-b} = \min\{n \geqslant 1 : S_n = -b\}$. Le nombre N_a est le numéro du premier jeu à l'issue duquel le stock de gâteaux du Schtroumpf pâtissier est vidé. Le nombre N_{-b} est le numéro du premier jeu à l'issue duquel Schtroumpf gourmand a obtenu b gâteaux « négatifs », *i.e.* ses b unités de plonge (saturation du pensum). La probabilité cruciale du problème est

$$\mathrm{Prob}(\text{Schtroumpf gourmand gagne}) = \mathrm{Prob}(N_a < N_{-b}).$$

Le Schtroumpf avisé aura reconnu le célèbre problème de la ruine du joueur : l'inégalité $N_a < N_{-b}$ signifie que Schtroumpf pâtissier est ruiné (plus de gâteau) avant la saturation en corvée du Schtroumpf gourmand.

3 Résolution du problème

Afin de calculer la probabilité $\mathrm{Prob}(N_a < N_{-b})$, on introduit la probabilité intermédiaire $u_i = \mathrm{Prob}(N_a < N_{-b} | S_{n_0} = i)$ en tenant compte de l'état obtenu à l'issue d'un certain $n_0{}^{\mathrm{e}}$ jeu : on suppose qu'à ce moment Schtroumpf gourmand dispose de i gâteaux (positifs ou négatifs, est-il utile de le rappeler ?!), disons qu'il est dans l'état $i \in \{-b, -b+1, ..., a-1, a\}$. En fait,

u_i ne dépend pas de n_0, le dénouement du jeu ne repose que sur le nombre i de gâteaux à un moment donné arbitraire (là, ça sent le Markov à plein nez...). On cherche à calculer u_0.

On va écrire (qui scribit bis legit) une relation de récurrence pour la suite $(u_i)_{-b\leqslant i\leqslant a}$. Supposons qu'à l'issue du n_0e jeu, Schtroumpf gourmand soit dans un état i.

- Soit il a gagné ($X_{n_0} = +1$ avec probabilité p) et alors on avait $S_{n_0-1} = i-1$ *i.e.* il se trouvait antérieurement dans l'état $i-1$.
- Soit il a perdu ($X_{n_0} = -1$ avec probabilité q) et alors $S_{n_0-1} = i+1$ *i.e.* il se trouvait antérieurement dans l'état $i+1$.

Cette discussion oiseuse mais non alambiquée conduit à la relation, pour $-b < i < a$,

$$u_i = p\,\mathrm{Prob}(N_a < N_{-b}|S_{n_0-1} = i-1) + q\,\mathrm{Prob}(N_a < N_{-b}|S_{n_0-1} = i+1).$$

En d'autres termes

$$u_i = pu_{i-1} + qu_{i+1}$$

avec $u_a = 1$ (si $S_{n_0} = a$, Schtroumpf gourmand a définitivement gagné) et $u_{-b} = 0$ (si $S_{n_0} = -b$, il a perdu).

C'est une récurrence linéaire à trois indices dont l'équation caractéristique est $qr^2 - r + p = 0$ de solutions 1 et $\rho = p/q$. Comme $p = \frac{2}{3}$ et $q = \frac{1}{3}$, on $\rho \neq 1$ et l'on sait que la suite recherchée est alors une combinaison linéaire de deux suites géométriques de raison 1 et ρ : $u_i = \lambda\rho^i + \mu$. Les conditions $u_a = 1$ et $u_{-b} = 0$ fournissent ensuite les équations $\lambda\rho^a + \mu = 1$ et $\lambda\rho^{-b} + \mu = 0$ donnant

$$\lambda = \frac{1}{\rho^a - \rho^{-b}} = \frac{\rho^b}{\rho^{a+b} - 1}, \qquad \mu = -\frac{1}{\rho^{a+b} - 1}.$$

D'où

$$u_0 = \lambda + \mu = \frac{\rho^b - 1}{\rho^{a+b} - 1} = \frac{q^a(p^b - q^b)}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

La solution à notre problème est finalement, avec $p = \frac{2}{3}$ et $q = \frac{1}{3}$,

$$\boxed{\mathrm{Prob}(\text{Schtroumpf gourmand gagne}) = \frac{2^b - 1}{2^{a+b} - 1}.}$$

- *Cas d'une munificence de Schtroumpf pâtissier élevée à son pinacle* : faisons tendre à présent a vers $+\infty$. La probabilité précédente tend vers 0 :

$$\boxed{\mathrm{Prob}(\text{Schtroumpf gourmand gagne}) = 0.}$$

- *Cas d'un Schtroumpf gourmand stakhanoviste* : en revanche, si Schtroumpf gourmand n'était pas si cossard qu'on pourrait le subsumer, on pourrait faire tendre b vers $+\infty$. Cette fois :

$$\boxed{\mathrm{Prob}(\text{Schtroumpf gourmand gagne}) = \frac{1}{2^a}.}$$

Bonus track : si on « bricole » les dés de façon à avoir un jeu équitable, *i.e.* tel que $p = q = \frac{1}{2}$, alors l'équation caractéristique utilisée précédemment devient $r^2 - 2r + 1 = 0$. Elle admet une racine double qui vaut 1 et dans ce cas, la suite recherchée est une suite arithmétique : $u_i = \lambda i + \mu$. Les conditions $u_a = 1$ et $u_{-b} = 0$ fournissent $\lambda a + \mu = 1$ et $-\lambda b + \mu = 0$ donnant $\lambda = \frac{1}{a+b}$ et $\mu = \frac{b}{a+b}$. Enfin, puisque $u_0 = \mu$, on trouve

$$\boxed{\mathrm{Prob}(\text{Schtroumpf gourmand gagne}) = \frac{b}{a+b}.}$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, la probabilité précédente tend vers 0 :

$$\boxed{\text{Prob(Schtroumpf gourmand gagne)} = 0}$$

et en faisant tendre b vers $+\infty$, la probabilité précédente tend vers 1 :

$$\boxed{\text{Prob(Schtroumpf gourmand gagne)} = 1.}$$